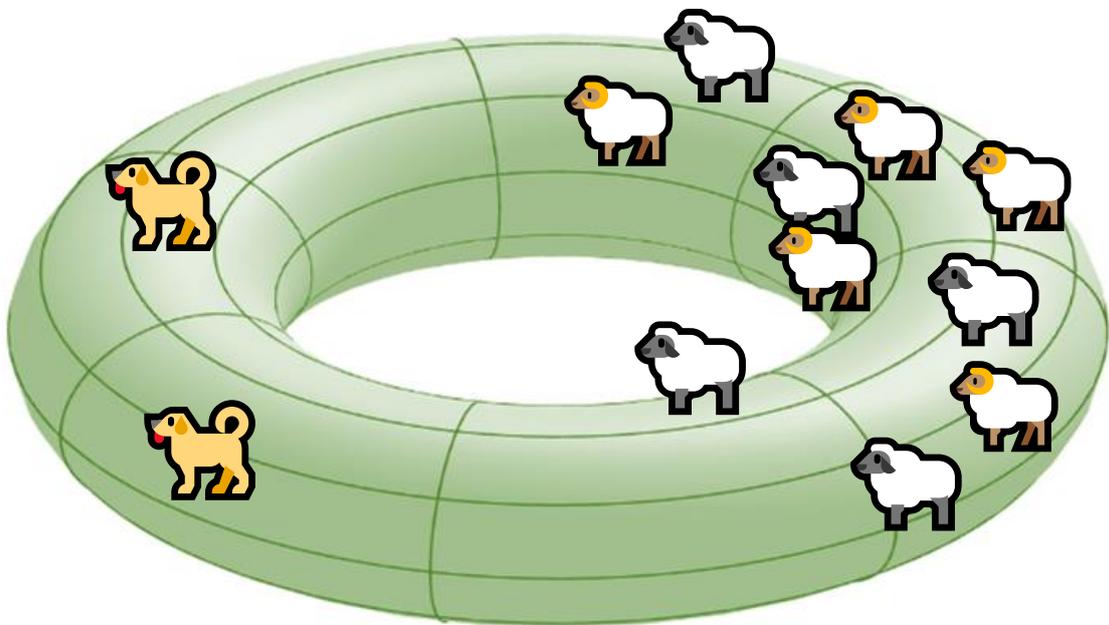


Fmurs

～牧羊犬が羊を捕らえるマス目ゲーム～



🐏 羊 VS 犬 🐕

0. プロローグ

M「マザー牧場で羊の大打進見てきたの！！動画を撮ってきたからぜひ見てほしい」

R「可愛い♡」

M「ありがとう！！かわいいよね！！！！」

数日後…

M「目白祭で展示する研究のテーマどうしよう？もう決まってる？」

R「うん。この前見せてもらった動画から牧羊犬の動きは合理的なのか…って思ったから数学的に証明できたら面白い？」

M「いいね👍」

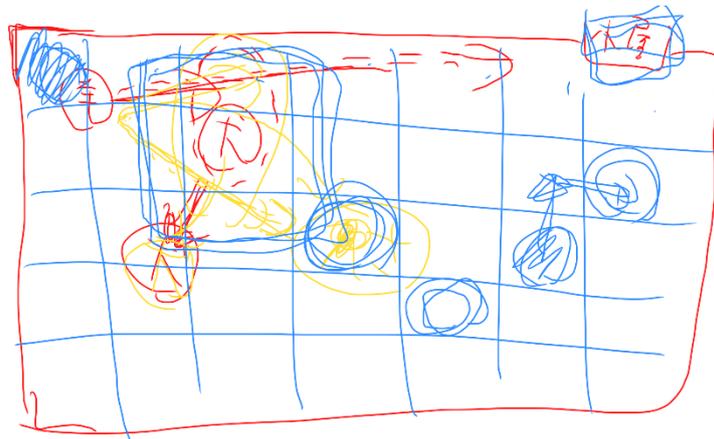
先輩は過去に AWZ ゲームや AFIS というゲームを作って研究していたから何かゲームを作って研究したいな。」

数日後@zoom…

M&R は目白祭で展示する研究のテーマの候補をそれぞれ F 先生に発表した。

F 先生はテーマ 1 つ 1 つに意見をくださったが M&R はというと、お互いのテーマと自分のテーマどちらにするか悩んでいた。

F 先生は何か思いついたのか 5×7 のマス目に何かを書き込み始めた。

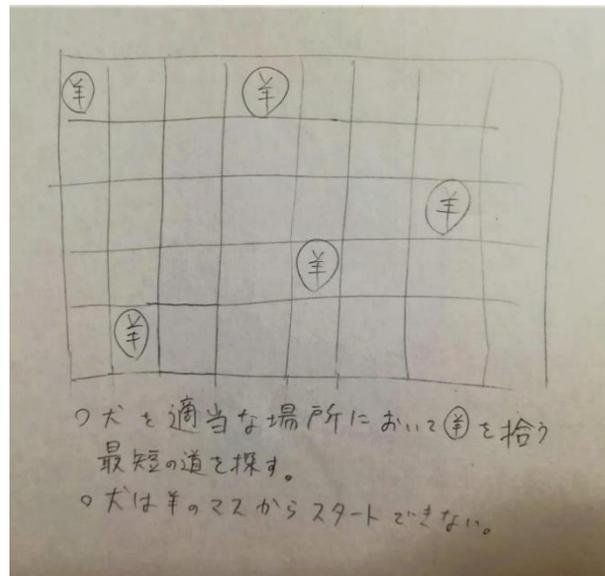


F 先生「2 人の案から思いついたんだけど、犬を誘導させて羊を小屋へ誘導するゲームを研究してみたら面白そうだね」

M&R「ピコーンッ！＼(◎o◎)／！」

数日後…M&R はマス目ゲームの限界を知るのである

M「この前はピコーンッ！＼(◎o◎)／！ってなったけど、羊と牧羊犬を同時に動かすって考えたら難しいなと思った！だから羊を固定して犬を動かすゲームを考えてみたんだけどどう思う？」



R「私的にはどちらも動かせた方がよりリアルに寄せられていいなっとは思っ…！！」

M「両方動かすってことは2人用ゲームで考えてるってことでいいのかな？マス目のゲームでアナログだから限界に近いなと思った。」

R「うーん…」

M「うーん…」

数日後…

M「調べてみたらペグ・ソリテア※っていうゲームを応用したフォックス&ギースっていうのがあったよ。これを参考にして羊と犬のゲームを作ってみた。動画で撮ったから感想教えて！」

R「羊と犬の勝利の定義が理解しやすくっていいね👍」

するとどこからかF先生がやってきて

F先生「話は聞かせてもらった。フィールドをトラスにするとさらに面白そうだね。」

M&R「ピコーンッ！＼(◎o◎)／！」

※ペグ・ソリテアとはピンを使った1人ゲームである。羊VS犬ではピンの動かし方を参考にさせてもらった。

1.概要

2人のプレイヤーが犬側と羊側に分かれ、以下のルールに沿ってマス目上で犬と羊を交互に動かす。犬が羊を攻撃していき、羊が全滅した時点で犬側と羊側を交代。
少ない手で全滅させた方の勝ち。

2-1.基本ルール

【ステージ】

- 1, 縦10×横9のマス目で行う
- 2, 左右が繋がっている/上下は壁/筒をイメージ
※筒を基本のステージとする

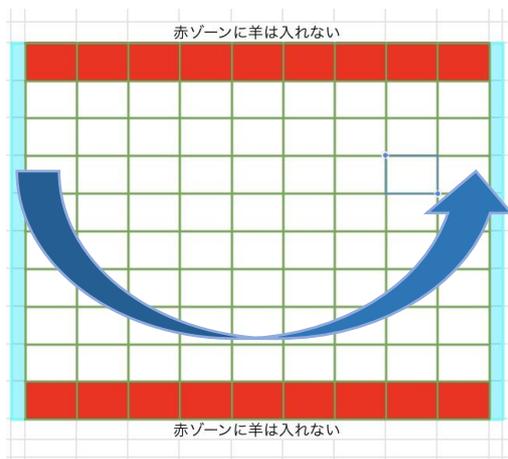


図1

←左右が繋がっている

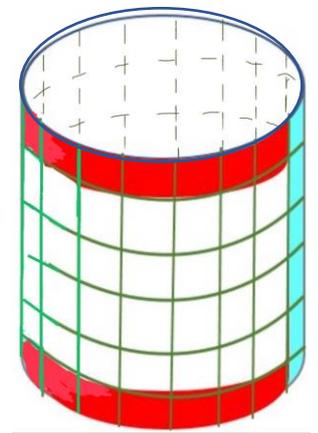


図2

【最初の配置】

- 1, 犬を最初に2匹配置
- 2, 羊10匹を群れをなすように配置
つまり **【どの羊に対してもその周囲8マス(図3の黄色マス)のどれかで少なくとも1匹の羊がいる】** —★とする

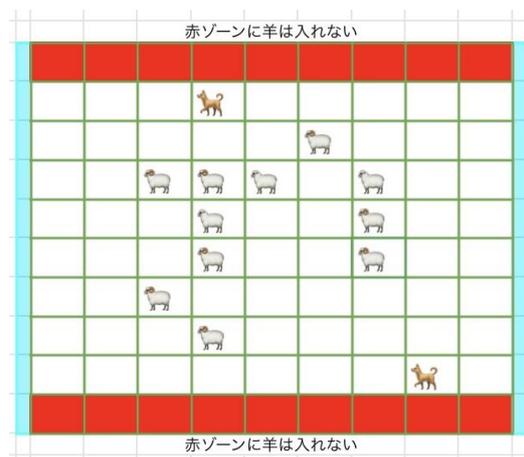
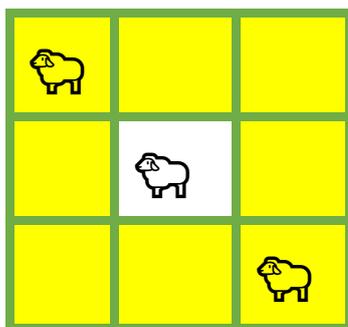


図3 羊の周囲8マスの説明図(左)と羊の配置例(右)

【犬の動き】

1, 1匹の犬を上下または左右の好きな方向に1マス移動させる。

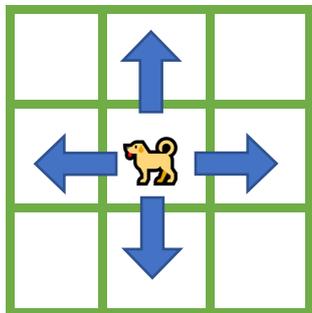


図4

2, 羊が隣のマスにいたらジャンプして攻撃する。

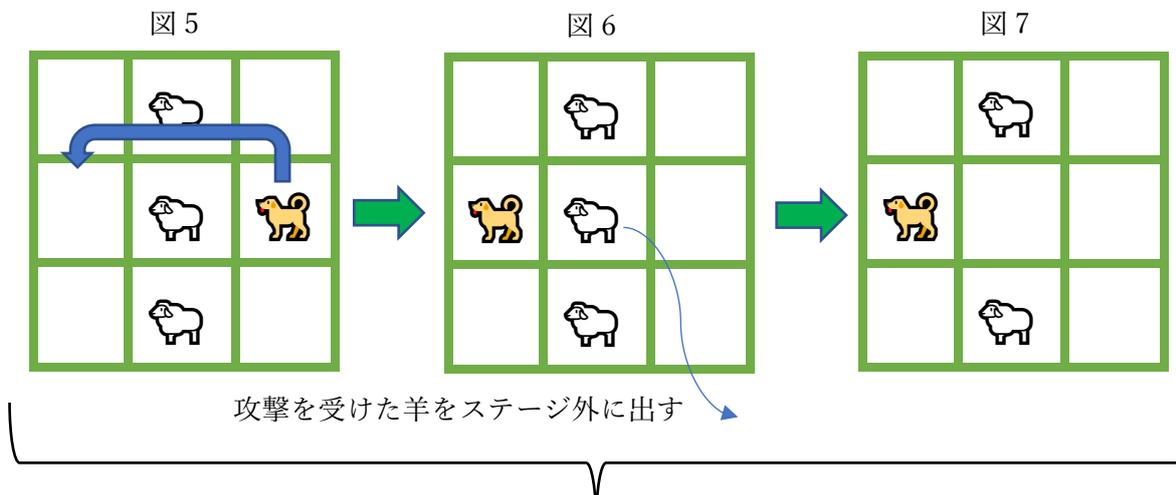


図5～図7で1手と数える

※複数の羊が隣のマスに連続していれば1回のジャンプで複数の羊を攻撃する

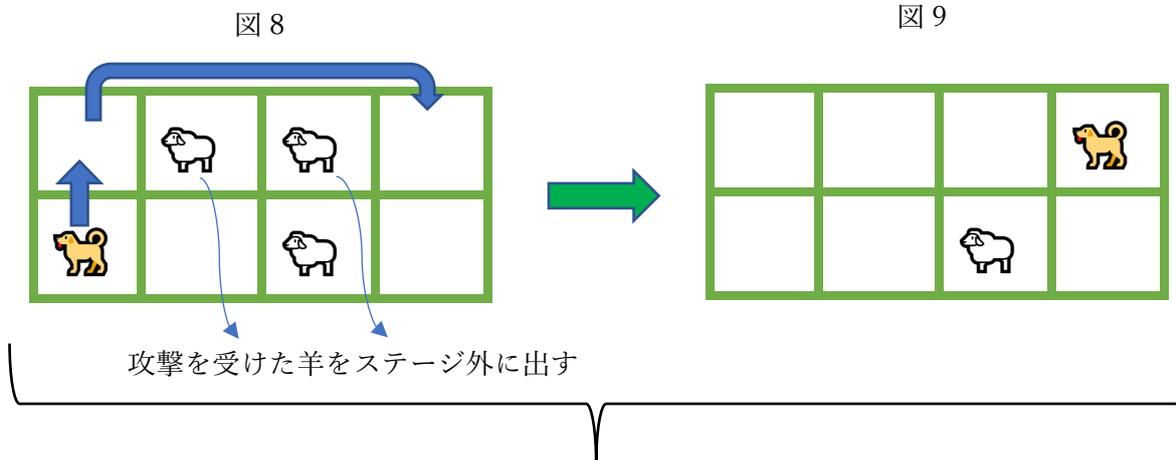


図8,9で1手と数える

- 3, ジャンプした着地点の隣のマスに羊がいたら2の移動を繰り返すことを許す。
 図10で犬を【犬の動き】の1,2に従って移動すると図11のようになる。
 すると隣のマスに羊がいるのでジャンプして攻撃することができる(図12,図13)。

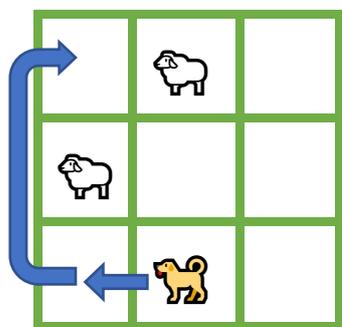


図10

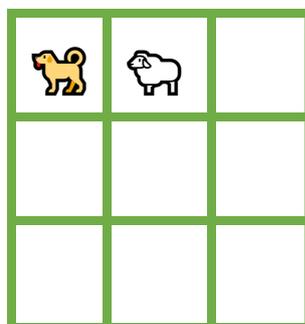


図11

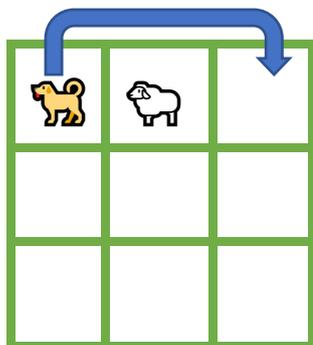


図12

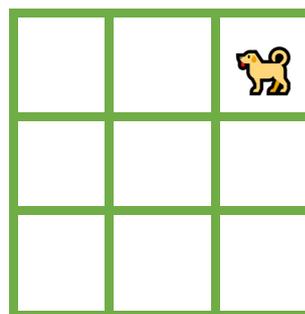


図13

図10~図13で
1手と数える

- 4, 羊が残り2匹になると斜めの移動も許す
 ただし斜めで羊を攻撃することを許さない。すなわち図15のような移動の仕方は許されない。

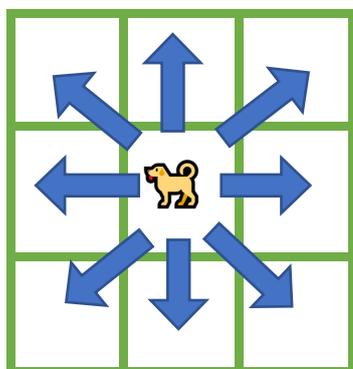


図14

これはダメ

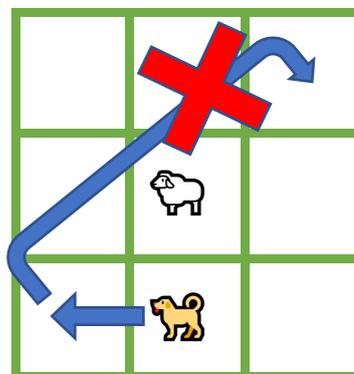


図15

【羊の動き】

1, 1匹の羊を上下または左右の好きな方向に1マス移動させる

※1ただし★の状態を保つ

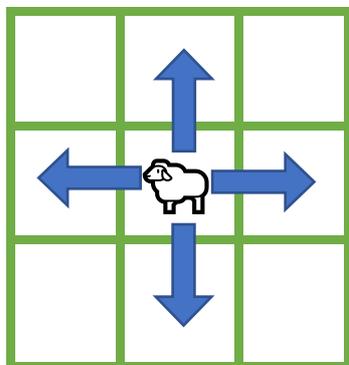


図 16 基本的な移動

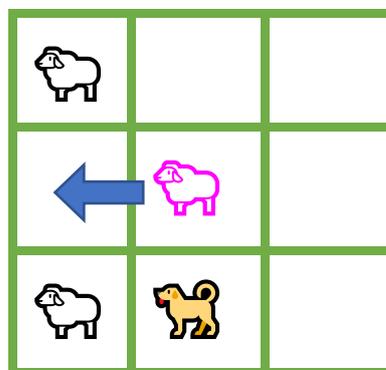


図 17

この場合、ピンク色の羊は★の状態を保たなければならぬので左にのみ移動することが許される。

※ただし犬の攻撃を受け分裂した場合は★の関係を失ってもよいものとする。

例えば、図 18 において犬が上に移動すると羊を2匹捉えることができるのが図 19 のように犬は移動することは許される。

しかし、図 18 と図 20 を比較すると犬の攻撃によって、赤い羊は★の関係を失ってしまっている。この先、赤い羊は★の関係を失ったまま移動することが許される。ただし他の羊の周囲8マスに移動したら★の関係を維持して動かすものとする。

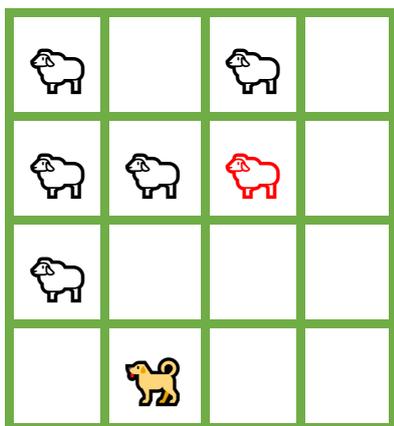


図 18

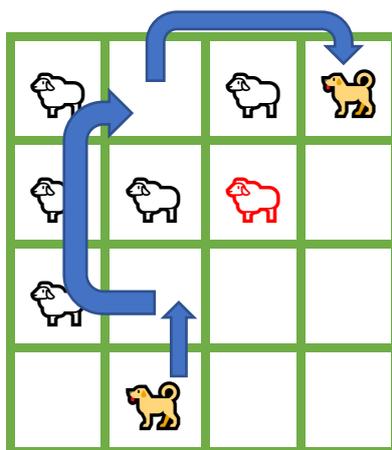


図 19

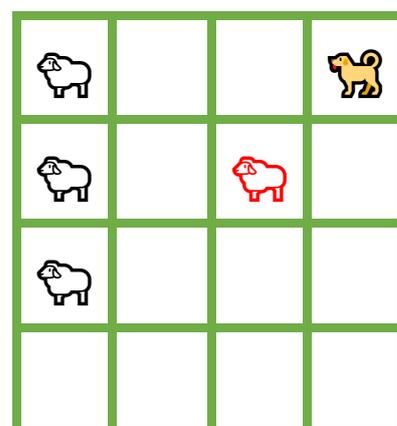


図 20

2, 犬が羊を攻撃できなくなるため羊が壁の手前1行に立ち入ることは許さない。

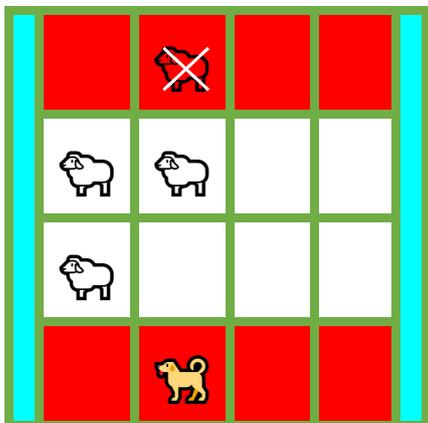


図 21

3, 羊が残り2匹になると斜めに移動することも許す。

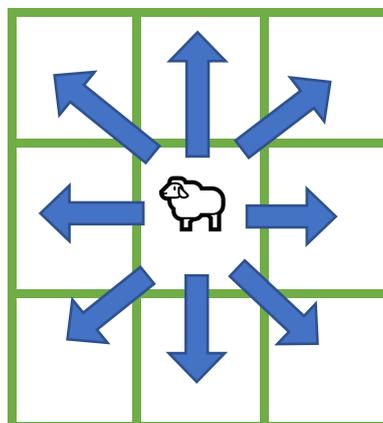


図 22

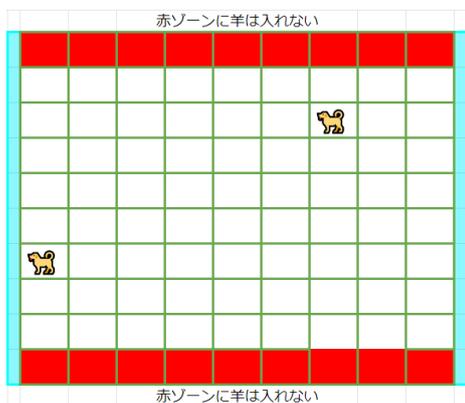
【勝敗の決め方】

羊を全滅させるまでの手数が少ない方の勝ち

【ゲームの進め方例】

ゲームの参加者を A と B として説明していく。

1. 先手と後手を決める。ここでは A が先手、B が後手とする。
2. 先手は犬を 2 匹配置する。

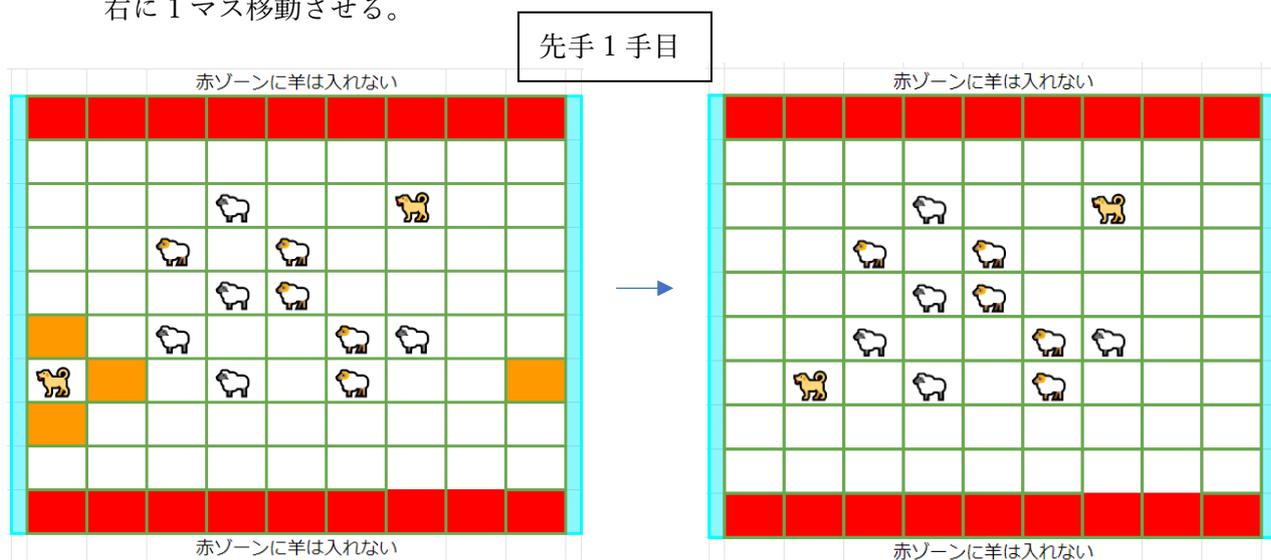


3. 後手は羊を 10 匹配置する。

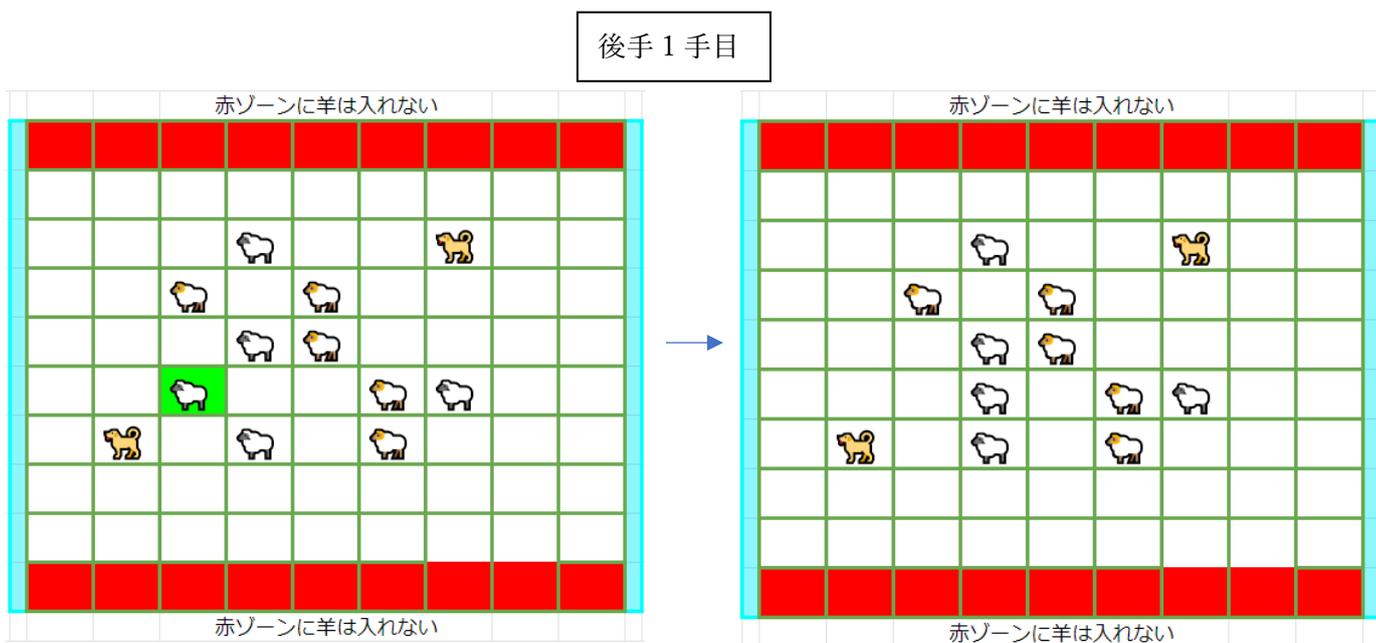


★の関係を保って羊を配置すること。

4. 先手は手数を数えておく。
5. 1手を打ち終わったら「終わりました」等の発言をして自分の番が終わったことを相手に伝える。
6. 先手は犬1匹を1マス移動させる
例えば左下の犬を動かすとするとオレンジ色のマスのどれか一つに移動できるので、右に1マス移動させる。

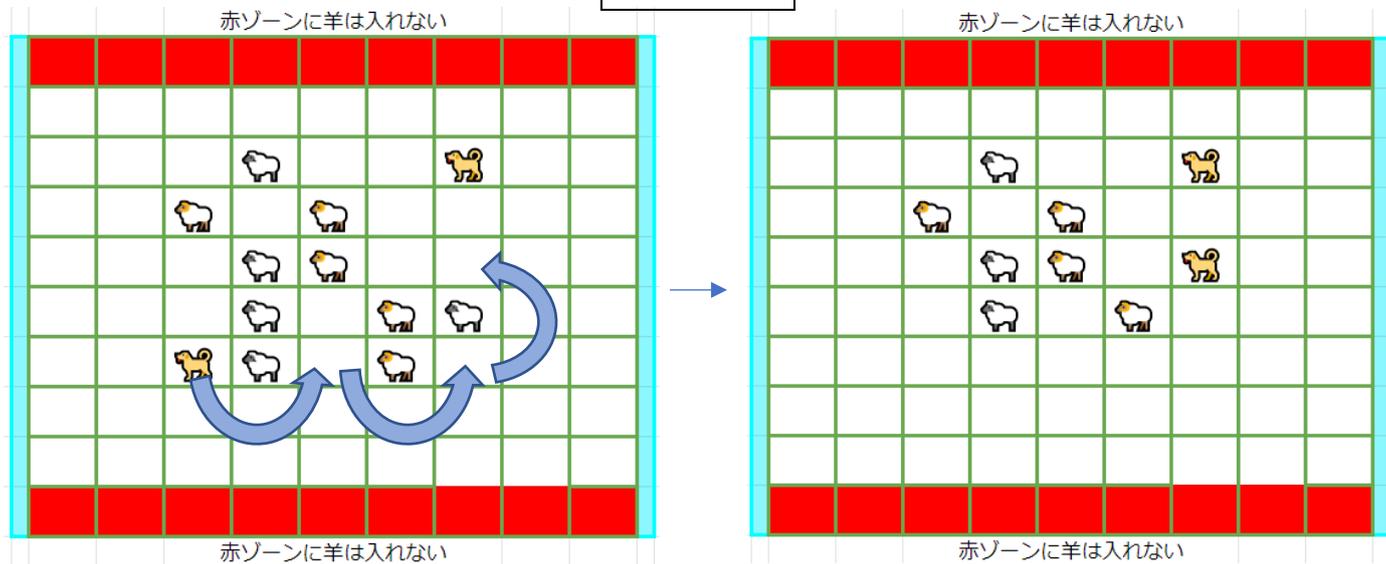


7. 次に後手が羊を1匹移動させる。
黄緑色のマス目(説明するためにマス目に色を付けた)にいる羊を移動させるとする。
★の関係よりその羊が移動できるのは右のみである。右に1マス移動させる。



8. このように先手と後手が交互に駒を移動させていく。

先手 2 手目

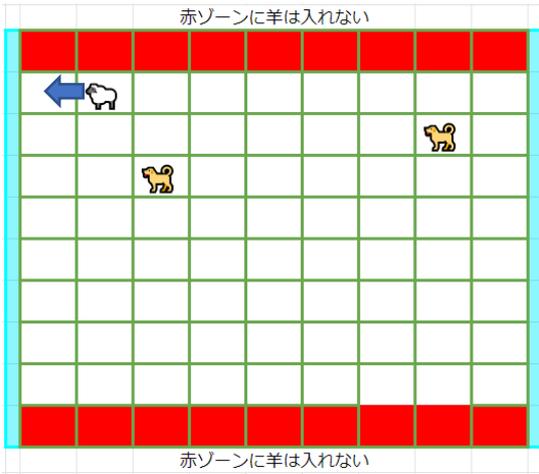


後手 2 手目

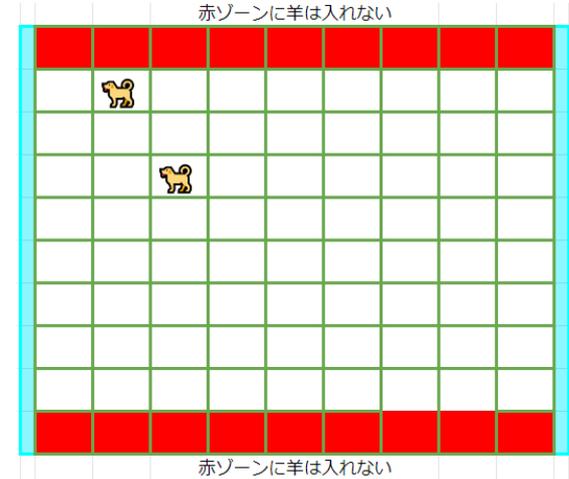
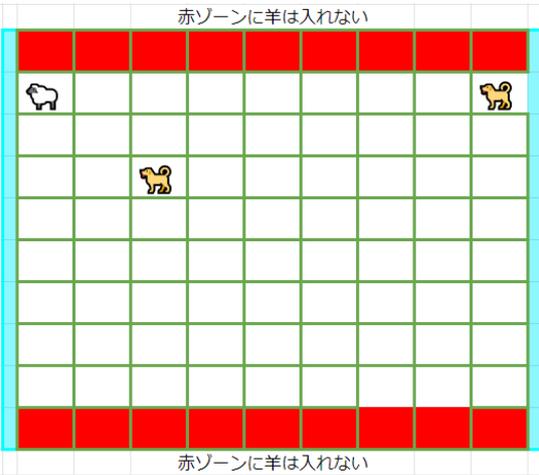
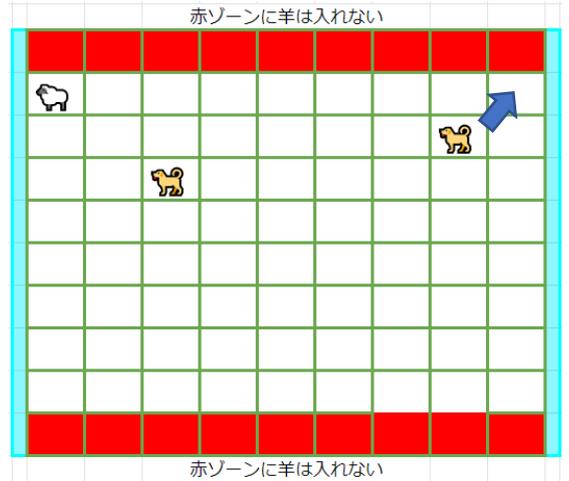


～途中省略～

後手
7
手
目



先手
8
手
目

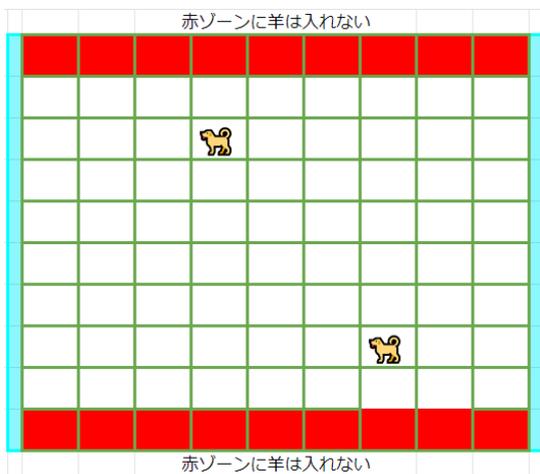


9. 羊が全滅したら先手と後手を入れ替える。

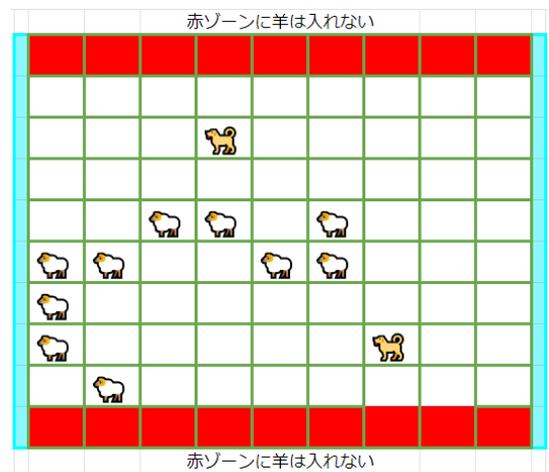
A が 8 手でゲームを終了した。今度は B が先手、A が後手となる。

10. 2~8 を繰り返す。

先手配置

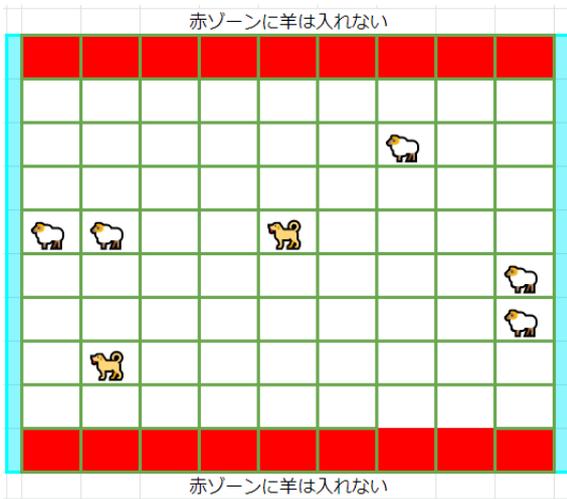


後手配置

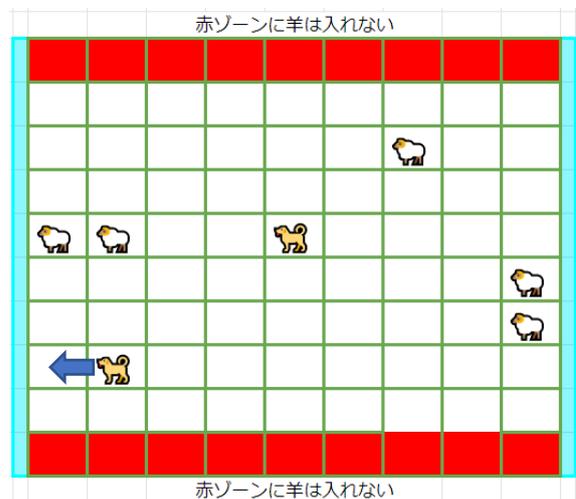


～途中省略～

後手 8 手目終了時点の配置



先手 9 手目



11. B が A の手数を超えた場合、羊が全滅していなくてもゲームを終了する。
ここでは B が 9 手目終了時点で羊が全滅していないので B は羊を全滅できずにゲームを終了した。
よって A の勝ちとなる。

2-2.遊び方のバリエーション

●羊と犬の数の変更

例えば羊の数を 5 匹と犬の数を 2 匹にする

●ステージの大きさ/形を変更

例えば上下左右が繋がっているもの(トーラス)にする

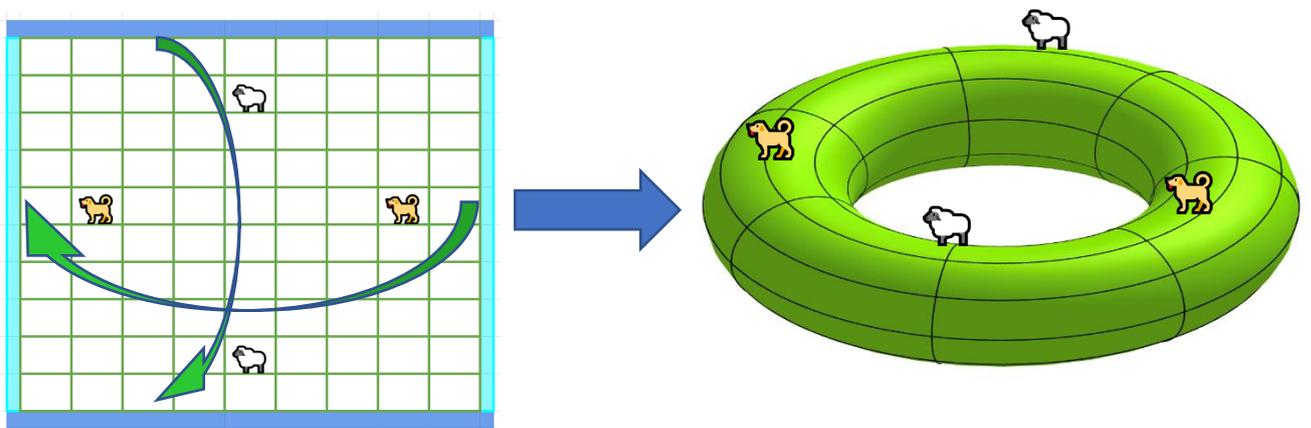


図 23 : 左の図を上下左右に繋げると右図のトーラスになる

●羊と犬の移動方法に選択肢を増やす

例えば

① 最初から羊・犬に斜めの移動を許し、羊が残り2匹になると犬に斜めの攻撃を許す

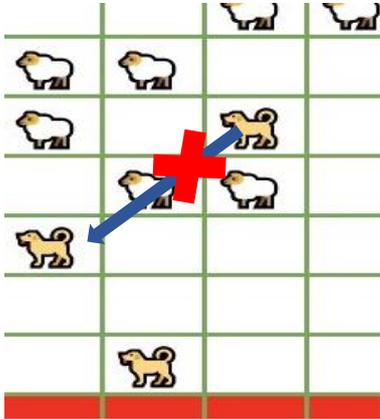


図 24

しかし羊が残り2匹になると…

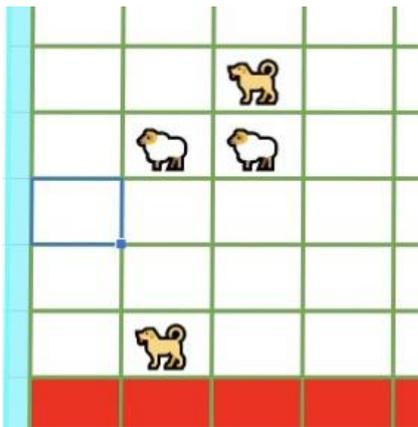


図 25

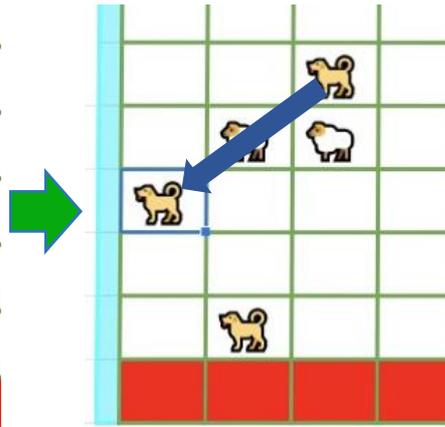


図 26

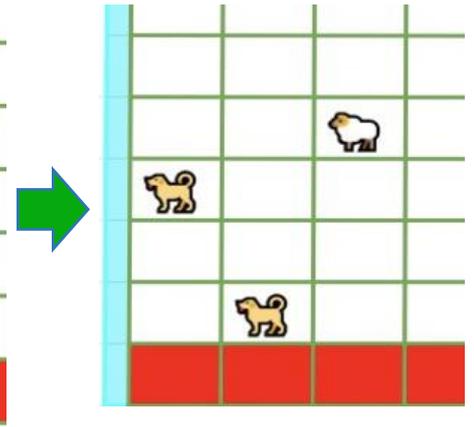


図 27

② ①の状態に加え羊が犬の周囲8マス(図28の黄色マス)のどれかに移動した場合、

[犬が次の手でその羊を攻撃することは許されない] —★★

※ただし犬と羊の位置関係が変われば★★の状態は失われる

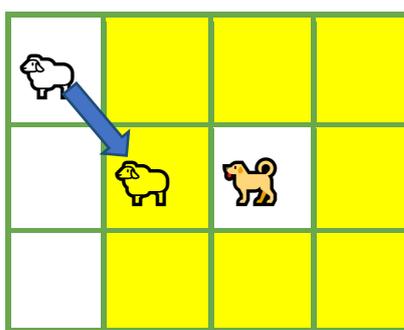


図 28

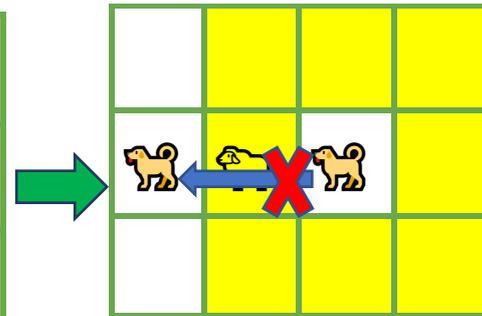


図 29：★★の状態



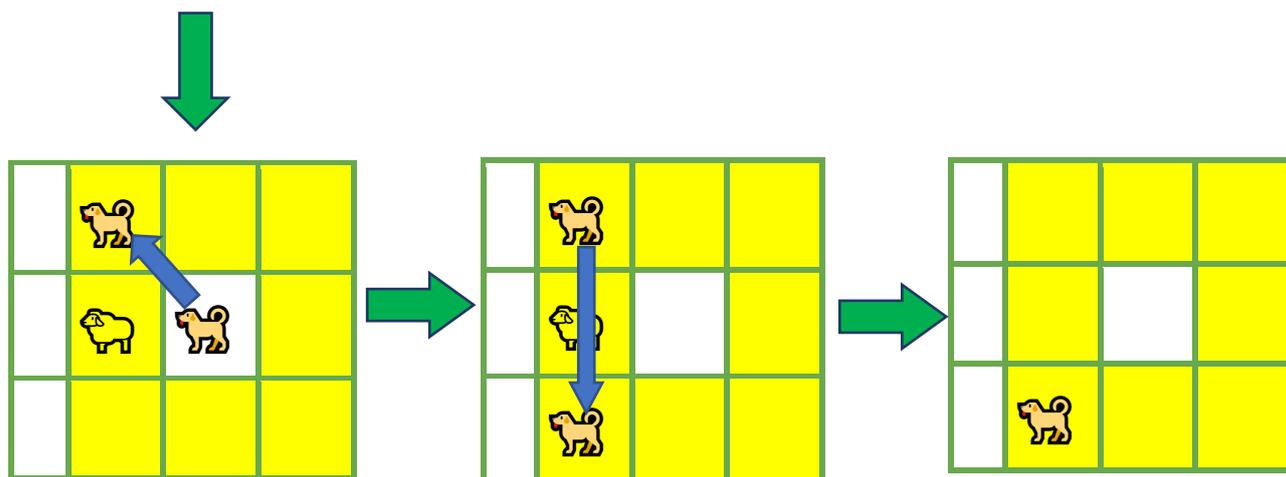


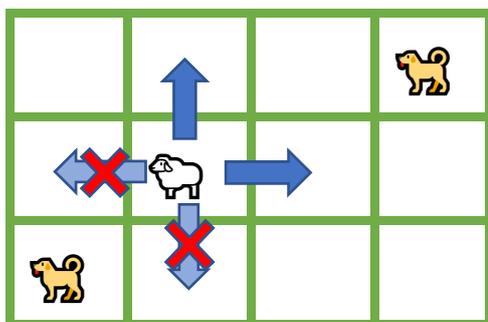
図 30：位置関係が変わる

図 31：位置関係が変わり

図 32

★★の状態が失われた

- 羊が犬の上下左右のマスに移動することを許さないルールにする。
例えば、次のような場面では羊は移動できるマスが上か右に限られてしまう。



- 犬の動かし方を将棋の駒にならって移動させる。
- フィールドに石を置く。
- 10手以内で何匹攻撃できるかを競う。

3.考察

- 始めはステージを左右上下壁に設定していたが、羊が最後の1匹になるとゲームが単調になってしまった。そこで左右をくっつけて筒状のステージに変更した。その結果、2匹の犬を有効活用でき、ゲーム性が増して戦略の選択肢が増えた。
- 羊にも攻撃能力を持たせることを考えた。具体的には羊の数を5匹から10匹に増やし、【犬の動き】の3を許さない、さらに羊に一手で2回の移動を許すことで犬を十字または四隅で囲めば羊の勝利とする。

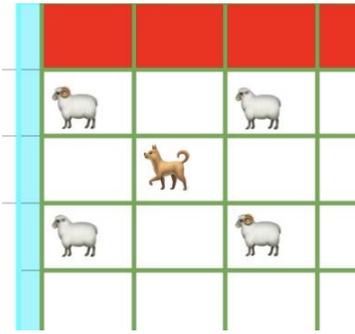


図 33

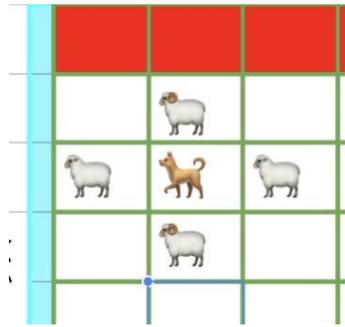


図 34

しかし実際に行ってみると、犬を十字または四隅で囲むことは極めて難しいと思ったため採用を見送った。

また、10匹にすると長引きそうに思えたが序盤でまとめて攻撃できるのでゲーム展開が派手になる。

●犬を増やすことを考え、3匹用意したが2匹の時のゲーム展開と比較して変化はなかった。

●初めは zoom のホワイトボードでステージを手書きしていたが綺麗なステージを描けないことや一回の移動ごとにコマを張り付け、消しゴムで消す作業が煩わしかった。

そこでもっと楽な操作でできないかと考え、スプレッドシートを用いるようになった。

結果、キーボードを2回打てば良くなりスムーズになったと同時に絵文字を使えるようになったことで見た目にも楽しくなった。

●実際にこのゲームを Zoom 上でばすます 2 名の方にやってもらったところ、ゲーム中にどちらの番なのか分かりづらいという指摘をもらった。私達も同様の経験をしたので、自分の番が終わり次第「終わりました」と相手に伝えるよう改善し、ゲームがスムーズにできるようになった。

4. スプレッドシートによる Fmurs

スプレッドシートで Fmurs のゲームを作成した。URL を共有すれば、リアルタイムでオンライン対戦ができる。



5.羊が犬から逃げ切れる可能性はあるのか

定理(1)

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ に対して上下が壁、左右が繋がっている $n \times 6$ (縦 n マス、横 6 マス) のステージ上に羊 1 匹犬 2 匹がいるとき、有限回の手数で犬は羊を捕らえられる。すなわち勝敗がつく。ただし 2 匹の犬は次の意味で対称の位置関係に配置する。つまり、 n を 3 で割ったときの商を k とすると“上から k 番目、右から 2 番目“のマスと“下から k 番目左から 2 番目“のマスに配置する。(図 1)

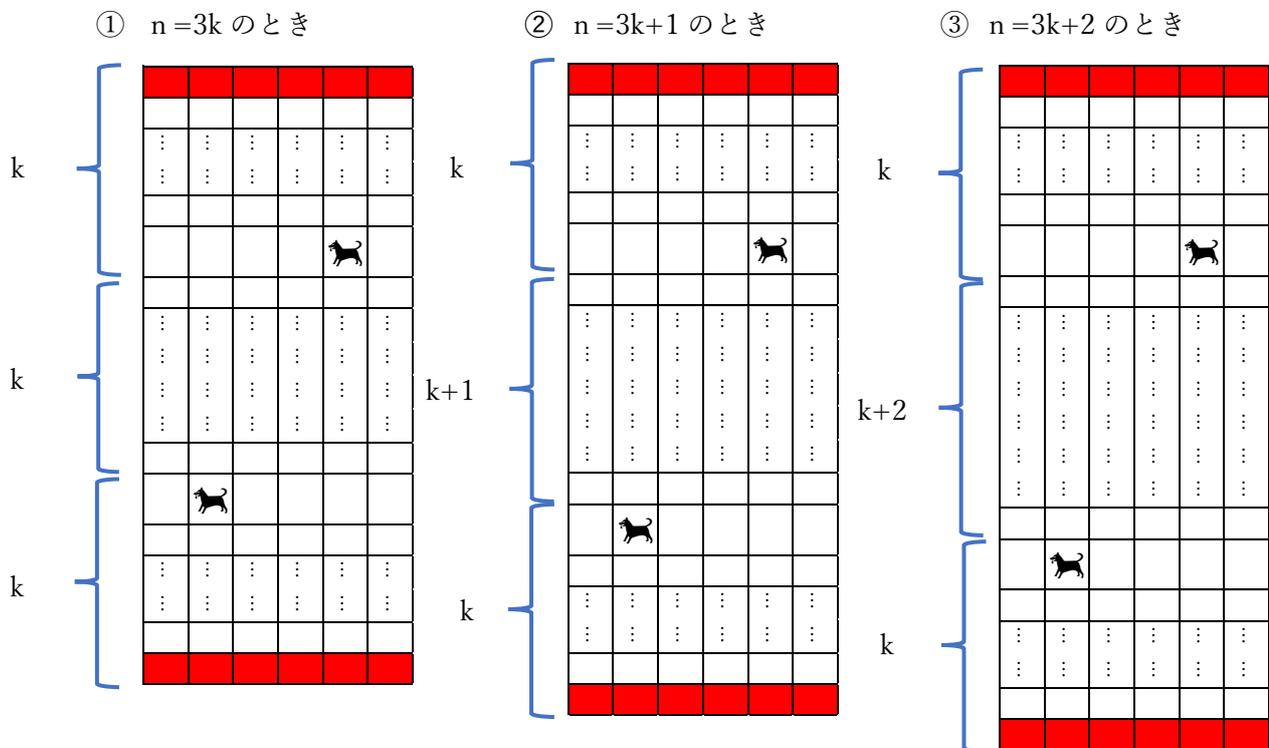


図 1: 対称の位置関係に配置された 2 匹の犬

証明) $n \times 6$ のステージでは勝敗がつくと仮定したとき、 $(n+1) \times 6$ のステージでは勝敗がつくことを数学的帰納法を用いて示していく。

(i) $n=3$ のとき

2匹の犬は図 a のような配置になる。次に犬がいるマス以外で羊を配置して勝敗がつくかどうかを調べた。犬の周囲 5 マスや犬の初手で勝敗がつくマスに×をつけていくと図 b のようになり、 3×6 では勝敗がつくことが分かる。

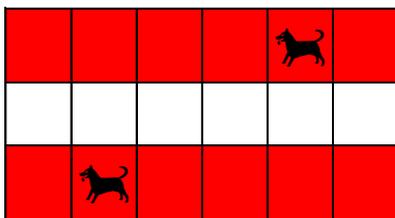


図 a

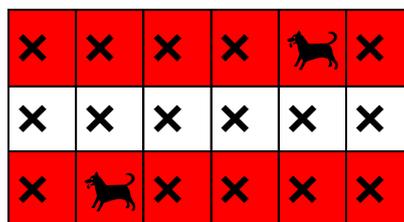


図 b

(ii) $(n-1) \times 6$ のとき勝敗がつくと仮定して $n \times 6$ の時を考える。

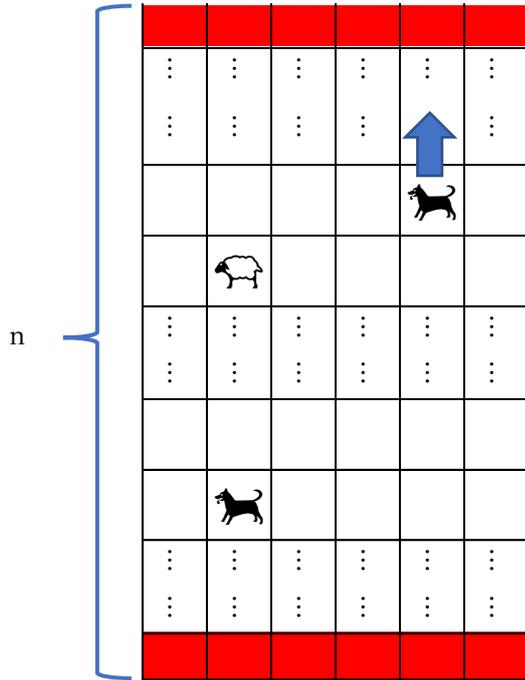
ここで犬の一手目の動きとして次の2つを考える。

[羊から近い位置にいる犬をその犬に近い壁側にひとつ移動させる。(図2の左)さらに動かして近い犬に近い壁(n 行)を無視する (図2の右)] —♠

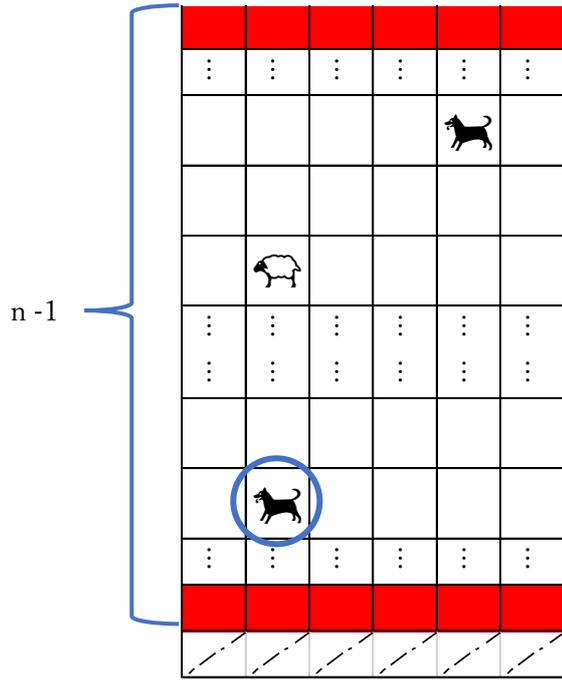
[羊から遠い位置にいる犬を羊がいる方向にひとつ移動させる。(図3の左)さらに動かした犬に近い壁(n 行)を無視する。(図3の右)] —♣

ここで、羊から遠い位置にいる犬が近づくまでの間に羊が n 行の壁まで逃げることができないため、 $n-1$ 行目を改めて壁と考えてよいことに注意する。

図 2

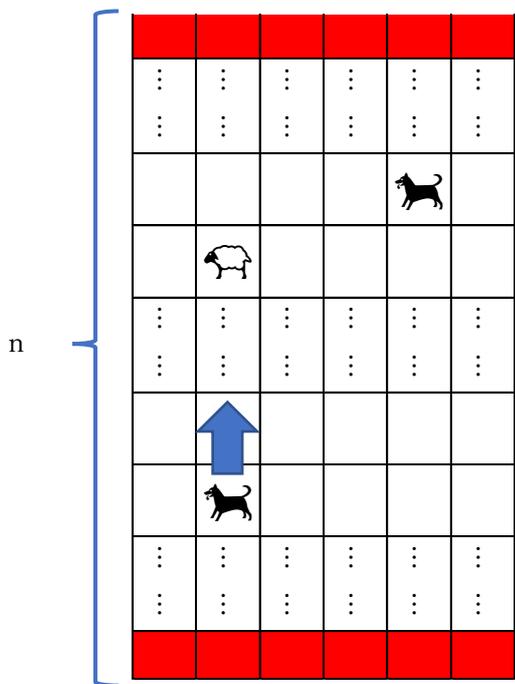


$n \times 6$ のステージ

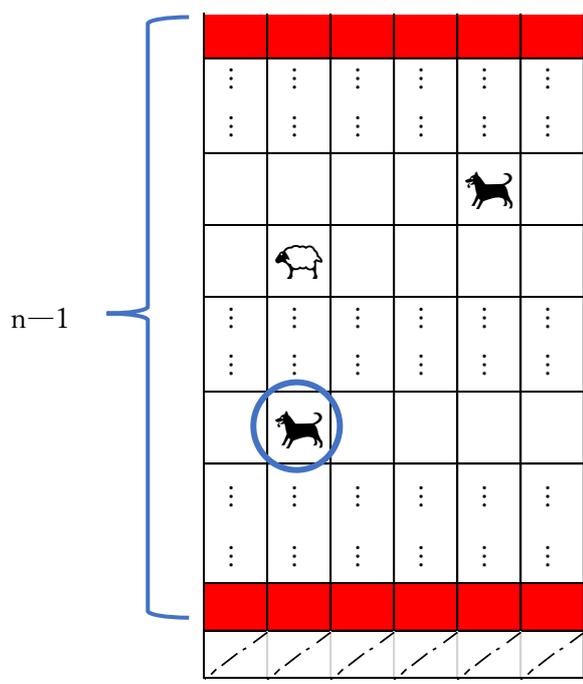


斜線部分を無視すると $(n-1) \times 6$ のステージになる

図 3



$n \times 6$ のステージ



斜線部分を無視すると $(n-1) \times 6$ のステージになる

(iii) $n=3m$ ($m \in \mathbb{N}$) のとき

図1の①の状態から始まり、♠を行うと上述の注意により図1の③の状態と一致する。よって $n=3m$ の時は $n-1=3m-1=3(m-1)+2$ に帰着でき、仮定よりこの $n \times 6$ のステージでも勝敗はつく。

(iv) $n=3m+1$ のとき

図1の②の状態から始まり、♣を行うと上述の注意により図1の①の状態と一致する。よって $n=3m+1$ の時は $n-1=3m$ に帰着でき、仮定よりこの $n \times 6$ のステージでも勝敗はつく。

(v) $n=3m+2$ のとき

図1の③の状態から始まり、♣を行うと上述の注意により図1の②の状態と一致する。よって $n=3m+2$ の時は $n-1=3m+1$ に帰着でき、仮定よりこの $n \times 6$ のステージでも勝敗はつく。

(i)~(v)より3以上のすべての自然数 n に対して定理(1)が成り立つ

□

定理(2)

定理(1)は羊が何匹いても正しい。

証明)羊が何匹いても一匹の羊にのみ狙いを定め、定理(1)を使うとその羊を捕らえることができる。必要なら図1の状態に犬を戻せば更にもう一匹の羊を捕らえることができる。よって帰納法により何匹でも有限回の手数で捕らえられる。 □

6.あしがき

プロローグから5か月後…

R「このゲームって数学要素が全然ないよねって思っていたけど、定理が作れたね。」

M「そうだね。羊が逃げ切れることがあるのかどうかってことを証明できてよかった。だけど少し証明を理解するのが難しかったな…」

R「ねえねえ！最近、証明ばかりでゲームやれてなかったから久しぶりにやろうよ！」

M「いいよ👍」

そのころ百年館10階では

F先生「証明できて良かった…！」

7.参考

ゲームにひそむ数理 秋山仁 中村義作 共著

フォックス&ギース <http://sekaiyugi.com/games/foxgeese-1.html>